



მაგიდა № 6

26.04.2015/ მათ/IV/ 705

ამოცანა № 4

გვერდი № 1

$$(x^2 - 6x + 8) \cdot P(x) = x(x+2) \cdot P(x-2)$$

$$(x-2) \cdot (x-4) \cdot P(x) = x(x+2) \cdot P(x-2)$$

ბრუნავთ, როგორც თუ ავიღებთ $x=1$, მაშინ $(-1) \cdot (-3) \cdot P(1) = 1 \cdot 3 \cdot P(-1)$

ანუ $P(1) = P(-1)$. $x=0$ -დან ვიღებთ, რომ $-2 \cdot (-4) \cdot P(0) = 0$ ანუ $P(0) = 0$.
თუ $x=4$, მაშინ $2 \cdot 0 \cdot P(4) = 4 \cdot 6 \cdot P(2)$ ანუ $P(2) = 0$.

თუ $x=-2$, მაშინ $-4 \cdot (-6) \cdot P(-2) = -2 \cdot 0 \cdot P(-4)$ ანუ $P(-2) = 0$

ანუ მივიღებთ, რომ $P(1) = P(-1)$ და $P(0) = P(2) = P(-2) = 0$.

ახლა ინდუქციური დავამტკიცოთ, რომ $P(n) = P(-n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ -ისთვის.

დავუშვათ, რომ თუ $P(n+1) = P(-n+1)$ მაშინ $P(n+1) = P(-n+1)$ და

ჩვენ $P(1) = P(-1)$ და $P(2) = P(-2)$ ამცოთ მივიღებთ ნებისმიერ $n \in \mathbb{Z}$ -სთვის.

$$\text{შვიტთ } x = n+1 \text{ მაშინ } (n-1) \cdot (n-3) \cdot P(n+1) = (n+1) \cdot (n+3) \cdot P(n-1)$$

თუ $n-1$ ან $n-3$ ნული უბრალოდ მივიღებთ, რომ $P(0) = 0$ ან $P(2) = 0$.

$$\text{ახლა ვაჩვენებთ } n-1 \neq 0 \text{ და } n-3 \neq 0 \text{ მაშინ } P(n+1) = \frac{(n+1)(n+3)}{(n-1)(n-3)} \cdot P(n-1)$$

ახლა შვიტთ $x = -n+1 \Rightarrow$

$$(-n+1) \cdot (-n-3) \cdot P(-n+1) = (-n+1) \cdot (-n+3) \cdot P(-n-1)$$

$$(n+1)(n+3) \cdot P(-n+1) = (n-1)(n-3) \cdot P(-n-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(-n-1) = \frac{(n+1)(n+3)}{(n-1)(n-3)} \cdot P(-n+1) = \frac{(n+1)(n+3)}{(n-1)(n-3)} \cdot P(n-1)$$

ანუ $P(n+1) = P(-n-1)$ ანუ ინდუქციის დასრულებულია

ანუ $P(n) = P(-n)$ თუ $n \in \mathbb{Z}$



მაგიდა № 6

26.04.2015/ მათ/IV/ 705

ამოცანა № 4

გვერდი № 2

განვიხილოთ ასეთი პოლინომი $Q(x) = P(x) - P(-x)$ $Q(x)$ -ს აქვს უსახური
როots-ები ვეხვი, ხოლო $\forall x \in \mathbb{Z}$ გვაქვს $P(x) - P(-x) = 0$ იმისათვის
რომ პოლინომს ქაჩეკს უსახური როots-ები ვეხვი ის უნდა იყოს
ძუღიძვი და 0-ის უბი. ანუ $Q(x) = 0$ ანუ $P(x) = P(-x) \forall x$
ჩვენ უნდა ვხედავთ რომ $P(0) = P(2) = P(-2) = 0$ ამიტომ $x=0, 2, -2$ აქვს ვეხვი
და სხვა როots-ებიც რომ უბი P , ის დავეხვი.

$$(x-2)(x+4) \cdot P(x) = x(x+2) \cdot P(x-2) \quad (1)$$

დავხვი $-x$.

$$(-x-2)(-x+4) \cdot P(x) = -x(-x+2) \cdot P(-x-2)$$

$$(x+2)(x+4) \cdot P(x) = x(x-2) \cdot P(-x-2) \quad (2)$$

გავყავით (1)-ს (2)-ზე:

$$\frac{(x-2)(x+4)}{(x+2)(x+4)} = \frac{(x+2) \cdot P(x-2)}{(x-2) \cdot P(-x-2)}$$

$$\frac{P(x-2)}{P(-x-2)} = \frac{(x-2)^2 \cdot (x+4)}{(x+2)^2 \cdot (x+4)} \quad (3)$$

$\forall x$ -ისთვის, x აქვს სახელი მნიშვნელობა.

აუ აქვს სახელი a , რომელიც არ არის 0, 2-ს და -2-ს და $f(a) = 0$
გვაქვს $P(x) = x^a \cdot (x-2)^b \cdot (x+2)^c \cdot R(x)$ სადაც $R(x)$ -ს არ აქვს ვეხვი.
 $P(x) = P(-x)$ ამიტომ ვხედავთ, რომ აუ $R(x)$ ძუღიძვი
ვხედავთ, რომ $P(x) = K \cdot x^2(x^2-2)(x+2)$ ანუ ვხედავთ, რომ აქვს ვეხვი და
ძუღიძვი, სადაც K ნებისმიერი რიცხვი.



მაგიდა № 6

26.04.2015/ მათ/IV/ 705

ამოცანა № 4

გვერდი № 3

~~ცხადია, რომ $R(x)$ ცუდი ხელსდება, ხოლო $P(x)$ მას არ აქვს ვადა~~

ცხადია $P(x) = x(x-2)(x+2) \cdot R(x)$

$$P(x) = P(-x) \Rightarrow x(x-2)(x+2) \cdot R(x) = -x(-x-2)(-x+2) \cdot R(-x)$$

საიქნება $R(x) = -R(-x)$ ანუ $R(0) = 0$ ანუ

$$P(x) = x^2(x-2)(x+2) \cdot N(x)$$

$x^2(x-2)(x+2) = x^2(x^2-4)$ ეს ცუდაა ანუ $N(x)$ უნდა იყოს ცუდი, რომ $P(x)$ გამოვიღოთ ცუდი. ცხადია, რომ ან $N(x)$ ბევრად მაშინ

$$P(x) = x^2(x^2-4) \cdot K$$

აქედან ვიხსენებთ პირობას.

ჩავსვათ $(1) -$ ში $P(x) = x^2(x^2-4) \cdot W(x)$ მაშინ მივიღებთ

$$(x-2)(x-4) \cdot x^2 \cdot (x-2)(x+2) \cdot W(x) = x(x+2) \cdot (x-2)^2 \cdot ((x-2)^2-4) \cdot W(x-2)$$

$$x^2 \cdot (x-2)^2 \cdot (x+2)(x-4) \cdot W(x) = x^2 \cdot (x-2)^2 \cdot (x+2) \cdot (x-4) \cdot W(x-2)$$

ანუ ან $x \neq 0, 2, -2, 4$ მაშინ $W(x) = W(x-2) \neq x$

~~რომ განვიხილოთ ახალი პირობები $G(x) = W(x) - W(x-2)$~~

~~ანუ უნდა ვაპოვოთ $W(x)$, რომლისთვისაც $W(x) = W(x-2) \neq x$~~

~~ანუ $W(x)$ -ს აქვს იგივე ვალუა მინუს მაშინ ცხადია აქვს უსასრულო, ხოლო ვალუა ანუ მივიღებთ $W(x) = 0$. ახლა ვაქვს $W(x)$ -ს არ აქვს ვალუა,~~

~~მაშინ: ანუ განვიხილოთ $(0, 1)$ ინტერვალს $(0, 1)$ ინტერვალზე იგივე~~

~~ჩვენებებს უნდა შევხედოთ, ხოლო $(-1, 0)$ ინტერვალს, ეს, 5 იგივე,~~

~~ჩვენებ $(1, 2)$ - ანუ $W(x) = W(x+1) \neq x$~~



მაგიდა № 6

26.04.2015/ მათ/IV/ 705

ამოცანა № 4

გვერდი № 4

ანუ $N(x) = N(x+k) \quad \forall x$ და $x \in \mathbb{Z}$ -ისთვის.

~~ახლა ვაქვამხარ k ამის ნიშნის მიხედვით $(0, k)$ ინტერვალში, მაშინ $(0, k)$ ინტერვალში
 N -ს სიმრავლეს განვიხილავთ $(-k, 0)$ -ს, რომელიც სიმრავლეს განვიხილავთ $(0, k)$ -ს
სადა $(L-k, L)$ -ს, რომელიც სიმრავლეს განვიხილავთ $(0, k)$ -ს
 $N((0, k)) = N((L-k, L))$~~

~~ახლა x -ის მიხედვით ვიყოფიან k და k -ს მიხედვით~~

~~ვაქვამხარ k ამის ნიშნის მიხედვით $(0, k)$ ინტერვალში, მაშინ $N((0, k)) = N((L-k, L))$
 $N((-k, 0)) = N((L-k, L))$ ანუ $N((0, k)) = N((L-k, L))$
 $k \in (0, k)$ -ისთვის, ხოლო N მუდმივი ფუნქციაა.~~

$N(x) = N(x-2) \quad \forall x$ ანუ რომ განვიხილოთ N ფუნქციის მუდმივობა
 $K(x) = N(a) - N(b)$ აქ a და b არის ნებისმიერი მთელი რიცხვი ანუ
 $K(x) = 0$ ანუ $N(a) = N(b) \quad \forall a, b$ -ისთვის.
ანუ $N(x) = C \quad \forall x$ ანუ $P(x) = x^2(x^2-4) \cdot C$

შევამოწმოთ: $x^2(x-2)^2(x+2)(x-4) \cdot C = x^2(x-2)^2(x+2)(x-4) \cdot C$

ანუ ვასეგნებ $P(x) = C \cdot x^2(x^2-4) = Cx^4 - 4Cx^2 \quad \forall x$



შოთა რუსთაველის ეროვნული
სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL
SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო
ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 6

26.04.2015/ მათ/IV/ 705

ამოცანა №

გვერდი №

Large dashed rectangular area for the problem solution.